

Задачи по темам
«Системы счисления, алгоритмы и метаязыки»

1. Дать «интуитивное» определение алгоритма.
2. Перевод числа из десятичной системы счисления в q -ичную систему. Числа:
 $0, 1, 8, 16, 25.75, 891, 255;$
 $q = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16.$
3. Перевод числа из q -ичной в десятичную систему счисления. Числа:
 $1112, 11015, 22101.0123, 654328, \text{AFF716}.$
4. Арифметические операции в позиционных системах счисления:
 - а) $1111_2 + 110_2,$
 - б) $17_8 + 6_8,$
 - в) $1111_2 + 111_2 + 11_2,$
 - г) $17_8 + 7_8 + 3_8,$
 - д) $10001101.1_2 + 111011.11_2,$
 - е) $215.4_8 + 73.6_8,$
 - ж) $8D.8_{16} + 3B.C_{16};$
 - з) $11001001.01 - 111011.11_2,$
 - и) $311.2_8 - 73.6_8,$
 - к) $C9.4_{16} - 3B.C_{16};$
 - л) $5_8 \cdot 6_8,$
 - м) $101_2 \cdot 110_2,$
 - н) $1110011_2 \cdot 110011_2,$
 - о) $163_8 \cdot 63_8;$
 - п) $18_{16} : 3_{16},$
 - р) $10011101.1_2 : 100_2.$
5. Быстрый перевод из q -ичной системы счисления в систему с основанием q^n и обратно. Двоичные числа $1001, 111, 101010101.01011, 11101$ перевести в четверичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. Числа $3213_4, 75.12_8, 10FA.8_{16}$ перевести в двоичную систему.
6. Сформулируйте необходимое и достаточное условие делимости:
 - а) на три для числа, записанного в троичной системе счисления;
 - б) на пять для числа, записанного в шестнадцатеричной системе счисления;
 - в) на два для числа, записанного в семеричной системе счисления.
7. Построить структурированную блок-схему для решения следующей задачи. Дано натуральное число n . Поменять порядок цифр числа n на обратный.

8. Построить структурированную блок-схему для решения следующей задачи. Даны натуральные числа n, q_1, q_2, \dots, q_n . Найти те члены q_i последовательности q_1, q_2, \dots, q_n , которые при делении на 7 дают остаток 1, 2 или 5.
9. Построить НАМ в алфавите букв кириллицы, который к слову приписывает приставку «сам». Пример: Д \Rightarrow самД
10. Построить НАМ над алфавитом букв кириллицы, который к слову приписывает суффикс «ок». Примеры: лес \Rightarrow лесок, дуб \Rightarrow дубок, брус \Rightarrow брусок.
11. Построить алгоритм (НАМ и МТ) над алфавитом $\{0, 1\}$, заменяющий первые три единицы на нули. Примеры: 00 \Rightarrow 000, 010 \Rightarrow 0000, 010110111 \Rightarrow 000000111.
12. Построить алгоритм (НАМ и МТ), переводящий число, записанное в десятичной системе, в следующее по порядку. Примеры: 11 \Rightarrow 12, 99 \Rightarrow 100, 0 \Rightarrow 1.
13. Построить алгоритм (НАМ и МТ) над алфавитом $\{a, b, c\}$, который каждое второе вхождение a заменяет на b или на c в зависимости от того, в четной или нечетной позиции находится данное вхождение a . Позиции нумеруются слева направо, начиная с единицы. Пример: $aababca \Rightarrow abbabcca$.
14. Построить алгоритм (НАМ и МТ) над алфавитом $\{|\}$, переводящий число в «первобытной» системе счисления в пустое слово, если заданное число является степенью тройки, иначе — в какое-нибудь непустое слово.
15. Построить алгоритм (НАМ и МТ) над алфавитом $\{a, b\}$, который удаляет в слове каждое третье вхождение b .
16. Построить алгоритм (НАМ и МТ), переводящий число в четверичной системе счисления в «первобытную». Пример: $13_4 \Rightarrow |||||$.
17. Построить пример алгоритма (НАМ или МТ) в алфавите $\{a\}$, который **несамоприменим** и **неприменим** к любому слову в алфавите $\{a\}$.
18. Построить пример алгоритма (НАМ или МТ) в алфавите $\{a\}$, который **самоприменим** и **применим** к любому слову в алфавите $\{a\}$.
19. Построить пример алгоритма (НАМ или МТ) над алфавитом $\{a\}$, который **самоприменим** и **неприменим** к любому слову в алфавите $\{a\}$.
20. Построить пример алгоритма (НАМ или МТ) над алфавитом $\{a\}$, который **несамоприменим** и **применим** к любому слову в алфавите $\{a\}$.
21. Сформулировать условие задачи, которую решает НАМ над алфавитом $\{a, b\}$, заданный следующей схемой:

$$\left\{ \begin{array}{l} ** \rightarrow \#* \\ \#* \rightarrow \# \\ \#a \rightarrow a\# \\ \#b \rightarrow b\# \\ \# \mapsto \\ *aa \rightarrow a*a \\ *ab \rightarrow b*a \\ *bb \rightarrow b*b \\ *ba \rightarrow a*b \\ \rightarrow * \end{array} \right.$$

22. Сформулировать условие задачи, которую решает НАМ над алфавитом $\{ |, \# \}$ в применении к словам вида $x \# y$, где x и y — натуральные числа в «первобытной» системе счисления. НАМ задается следующей схемой:

$$\left\{ \begin{array}{l} |a \rightarrow a| \\ |\#| \rightarrow a\# \\ |\# \rightarrow \#b \\ b \rightarrow | \\ a \rightarrow c \\ c \rightarrow | \\ \# \mapsto \end{array} \right.$$

23. Сформулировать условие задачи, которую решает НАМ над алфавитом $\{ |, \# \}$ в применении к словам вида $x \# y$, где x и y — неотрицательные целые числа в «первобытной» системе счисления. НАМ задается следующей схемой:

$$\left\{ \begin{array}{l} b| \rightarrow |b \\ a| \rightarrow |ba \\ a \rightarrow \\ |\# \rightarrow \#a \\ \#| \rightarrow \# \\ \# \rightarrow \\ b \rightarrow | \end{array} \right.$$

24. Построить НАМ над алфавитом $\{a, b\}$, эквивалентный алгоритму из задачи 21, используя не более десяти правил и не более одного вспомогательного символа (*).
25. Построить формальную грамматику, порождающую те и только те цепочки в алфавите $\{a, b\}$, к которым применим НАМ, задаваемый схемой:

$$\left\{ \begin{array}{l} ab \rightarrow \\ a \rightarrow a \\ b \rightarrow b \end{array} \right.$$

26. Построить грамматику скобочных систем, удовлетворяющих ограничениям¹:

- а) $2 \leq$ протяжение системы ≤ 4 ;
- б) глубина системы ≤ 2 ;
- в) ширина системы ≤ 2 ;
- г) глубина ≤ 2 и ширина ≤ 2 ;
- д) глубина ≤ 2 , а ширина ≥ 2 .

27. Построить грамматику, порождающую цепочки в алфавите $\{a, b\}$, в которых количество букв b четно.

¹ Скобочную систему будем называть *неделимой*, если ее нельзя представить в виде конкатенации (соединения) двух непустых скобочных систем, т. е. в такой системе первая открывающая скобка парна последней закрывающей. *Протяжение* скобочной системы — это число неделимых скобочных систем, конкатенация которых дает данную систему. (Протяжение пустой с.с. равно нулю). *Ширина* — максимальное протяжение среди всех подсистем данной скобочной системы, *глубина* — максимальный уровень вложенности скобок.

28. Построить грамматику, порождающую цепочки в алфавите $\{a, b\}$, которые не оканчиваются на abb .
29. Построить грамматику, порождающую язык $\{a^m b^n \mid 0 \leq m < n\}$.
30. Построить грамматику, порождающую цепочки в алфавите $\{a, b\}$, в которых количество букв a не равно количеству букв b . Примеры: $a, abb, abbab, bbb, aab$.
31. Построить грамматику «товарных поездов» в виде БНФ и СД. Поезд состоит из тяги, за которой следуют вагоны. Тяга — это один или несколько тепловозов. Вагоны бывают двух типов: цистерны и рефрижераторы. На каждый рефрижератор в поезде приходится по меньшей мере две цистерны.
32. Построить грамматику арифметических выражений (в виде БНФ) в алфавите $\{+, -, *, /, ^, a, (,)\}$, где a символизирует операнд, $^$ — операцию возведения в степень. Грамматика должна отражать естественный приоритет операций, правую ассоциативность операции возведения в степень и левую ассоциативность остальных операций.
33. Грамматика обезьяньего языка выглядит так:

$$\begin{aligned} \langle \text{фраза} \rangle &::= \langle \text{слово} \rangle @ \langle \text{фраза} \rangle \mid \langle \text{слово} \rangle \\ \langle \text{слово} \rangle &::= \langle u \rangle \langle \text{слог} \rangle \mid \langle \text{слово} \rangle \langle \text{слог} \rangle \\ \langle \text{слог} \rangle &::= \langle \text{слог} \rangle ba \mid \langle \text{слог} \rangle bb \langle \text{слог} \rangle \mid a \end{aligned}$$

Кто из перечисленных ниже ораторов является шпионом, замаскированным под обезьяну?

Бабуин: $ababbaa@abaabba@aa$

Шимпанзе: $ababa@abba@abbaaaa$

Горилла: $abaa@abbaaa@aabbaa$

34. Язык «пляшущих человечков» задается грамматикой:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow \text{чел} A \text{чел} \mid \text{чел} \\ A \rightarrow \text{чел} S \text{чел} \mid \text{чел} A \text{чел} \end{array} \right.$$

Какие из приведенных ниже писем на языке «пляшущих человечков» фальшивые?

а)

б)

в)