Классификация грамматик и языков по Хомскому

грамматики классифицируются по виду их правил вывода

Четыре типа грамматик:

тип 0, тип 1, тип 2, тип 3

Язык, порождаемый грамматикой типа k $(k=0,1,2,3)$, является языком *типа* k.

$$G = \langle T, N, P, S \rangle$$

Тип 0

Любая порождающая грамматика является грамматикой *типа 0*.

На вид правил грамматик этого типа не накладывается никаких дополнительных ограничений.

Класс языков типа 0 совпадает с классом рекурсивно перечислимых языков (распознаваемых МТ).

Грамматики с ограничениями на вид правил вывода

Тип 1

Грамматика $G = \langle\, T, N, P, S \,\rangle$ называется *неукорачивающей*, если левая часть каждого правила из P не короче правой части (т. е. для любого правила $\alpha \to \beta \in P$ выполняется неравенство $|\,\alpha\,| \le |\,\beta\,|$).

В виде исключения в неукорачивающей грамматике допускается наличие правила $S \to \varepsilon$, при условии, что S (начальный символ) не встречается в правых частях правил.

Грамматикой *типа 1* будем называть неукорачивающую грамматику.

Тип 1 в некоторых источниках определяют с помощью так называемых контекстно-зависимых грамматик.

Грамматика $G = \langle\, T,\ N,\ P,\ S \,\rangle$ называется *контекстно-зависимой* ($КЗ$), если каждое правило из P имеет вид $\alpha \to \beta$, где $\alpha = \xi_1 A \xi_2$, $\beta = \xi_1 \gamma \xi_2$, $A \in N$, $\gamma \in (T \cup N)^+$, ξ_1, $\xi_2 \in (T \cup N)^*$.

В виде исключения в КЗ-грамматике допускается наличие правила $S \to \varepsilon$, при условии, что S (начальный символ) не встречается в правых частях правил.

КЗ-грамматика удовлетворяет определению неукорачивающей.

Неукорачивающие и КЗ-грамматики определяют один и тот же класс языков.

Тип 2

Грамматика $G = \langle\, T,\ N,\ P,\ S \,\rangle$ называется *контекстно-свободной* (*КС*), если каждое правило из P имеет вид $A \to \beta$, где $A \in N$, $\beta \in (\, T \cup N \,)^*$.

В КС-грамматиках допускаются правила с пустыми правыми частями.

Язык, порождаемый контекстно-свободной грамматикой, называется *контекстно-свободным* языком.

Грамматикой *типа 2* будем называть контекстно-свободную грамматику.

Любую КС-грамматику можно преобразовать в эквивалентную неукорачивающую КС-грамматику. (т.е. КС, удовлетворяющую также и определению неукорачивающей)

Тип 3

Грамматика $G = \langle T, N, P, S \rangle$ называется *праволинейной*, если каждое правило из P имеет вид $A \to wB$ либо $A \to w$, где $A \in N$, $B \in N$, $w \in T^*$.

Грамматика $G = \langle T, N, P, S \rangle$ называется *леволинейной*, если каждое правило из P имеет вид $A \to Bw$ либо $A \to w$, где $A \in N$, $B \in N$, $w \in T^*$.

Праволинейные и леволинейные грамматики определяют один и тот же класс языков. Такие языки называются *регулярными*. Право- и леволинейные грамматики тоже называют регулярными.

Регулярная грамматика является грамматикой *типа 3*.

Автоматной грамматикой называется праволинейная (леволинейная) грамматика, такая, что каждое правило с непустой правой частью имеет вид: $A \to a$ либо $A \to aB$ (для леволинейной, соответственно, $A \to a$ либо $A \to Ba$), где $A \in N$, $B \in N$, $a \in T$.

Для любой регулярной (автоматной) грамматики G существует неукорачивающая регулярная (автоматная) грамматика G', такая что $L(G) = L(G')$.

Праволинейные и леволинейные грамматики определяют один и тот же класс языков. Такие языки называются *регулярными*. Право- и леволинейные грамматики тоже называют регулярными.

Регулярная грамматика является грамматикой *типа 3*.

Автоматной грамматикой называется праволинейная (леволинейная) грамматика, такая, что каждое правило с непустой правой частью имеет вид: $A \to a$ либо $A \to aB$ (для леволинейной, соответственно, $A \to a$ либо $A \to Ba$), где $A \in N$, $B \in N$, $a \in T$.

Для любой регулярной (автоматной) грамматики G существует неукорачивающая регулярная (автоматная) грамматика G', такая что $L(G) = L(G')$.

Иерархия Хомского

Справедливы следующие соотношения:

1) любая регулярная грамматика является КС-грамматикой;

2) любая неукорачивающая КС-грамматика является КЗ-грамматикой;

3) любая неукорачивающая грамматика является грамматикой типа 0.

Неукорачивающие Регулярные $\subset$ *Неукорачивающие КС* $\subset$ *КЗ* $\subset$ *Тип 0*

(Запись $A \subset B$ означает, что A является собственным подклассом класса B)

Справедливы следующие соотношения для языков:

- каждый регулярный язык является КС-языком, но существуют КС-языки, которые не являются регулярными, например:

$$L = \{a^n b^n \mid n > 0\};$$

- каждый КС-язык является КЗ-языком, но существуют КЗ-языки, которые не являются КС-языками, например:

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\};$$

- каждый КЗ-язык является языком типа 0 (т. е. рекурсивно перечислимым языком), но существуют языки типа 0, которые не являются КЗ-языками, например: язык, состоящий из записей самоприменимых алгоритмов Маркова в некотором алфавите.

Иерархия классов языков

Тип 3 (*Регулярные*) $\subset$ *Тип 2* (*КС*) $\subset$ *Тип 1* (*КЗ*) $\subset$ *Тип 0*

Проблема «Можно ли язык, описанный грамматикой типа k ($k = 0, 1, 2$), описать грамматикой типа $k + 1$?» является алгоритмически неразрешимой.

Язык $L_{a,b} = \{a, b\}$. Какого он типа? Обычно требуется указать максимально возможный тип.

Ответ: типа 3

$S \to a \mid b$ — грамматика типа 3, порождающая данный язык.

($L_{a,b}$ является также языком типа 2, 1, 0 в силу иерархии Хомского)

(1) Примеры грамматик и языков

$$
\begin{aligned}
S &\to ABCS \mid ABc \\
BA &\to AB \\
CA &\to AC \\
CB &\to BC \\
Cc &\to cc \\
Bc &\to bc \\
Bb &\to bb \\
Ab &\to ab \\
Aa &\to aa
\end{aligned}
$$

Тип 1. Неукорачивающая, но не КЗ

Язык: $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

Примеры грамматик и языков

(2)

$$S \to aSb \mid ab$$

Язык: $\{a^n b^n \mid n > 0\}$

(3)

$$S \to aS \mid a$$

Язык: $\{a^n \mid n > 0\}$

Иерархия классов Хомского

Задача распознавания

Даны грамматика G и цепочка x

$x \in L(G)$?

Для грамматик типа 1 (а также типов 2 и 3) по классификации Хомского задача распознавания разрешима, т.е. существует общий алгоритм, отвечающий на вопрос: $x \in L(G)$?

Контекстно-свободные грамматики и языки

КС-грамматики позволяют выразить такие свойства языков программирования, как скобочные структуры, последовательность описаний и операторов и др. Но не могут задавать контекстно-зависимые свойства, например, соответствие числа формальных и фактических параметров при вызове функции. Для КС-грамматик существуют эффективные алгоритмы анализа, поэтому они применяются в трансляции, контекстные условия проверяются на

этапе семантического анализа

Левый (левосторонний) вывод цепочки $\beta \in (V_T)^*$ из $S \in V_N$ в КС-грамматике $G = (V_T, V_N, P, S)$:

в этом выводе каждая очередная сентенциальная форма получается из предыдущей заменой самого левого нетерминала.

Правый (правосторонний) вывод цепочки $\beta \in (V_T)^*$ из $S \in V_N$ в КС-грамматике $G = (V_T, V_N, P, S)$:

в этом выводе каждая очередная сентенциальная форма получается из предыдущей заменой самого правого нетерминала.

Рассмотрим пример грамматики:

$G = (\{a,b,+\}, \{S,T\}, \{S \to T \mid T+S;\ T \to a \mid b\}, S)$

можно построить выводы для цепочки a+b+a :

(1) $S \to T+S \to T+T+S \to T+T+T \to a+T+T \to a+b+T \to a+b+a$

(2) $S \to T+S \to a+S \to a+T+S \to a+b+S \to a+b+T \to a+b+a$

(3) $S \to T+S \to T+T+S \to T+T+T \to T+T+a \to T+b+a \to a+b+a$

Здесь (2) - левосторонний вывод, (3) - правосторонний, а (1) не является ни левосторонним, ни правосторонним

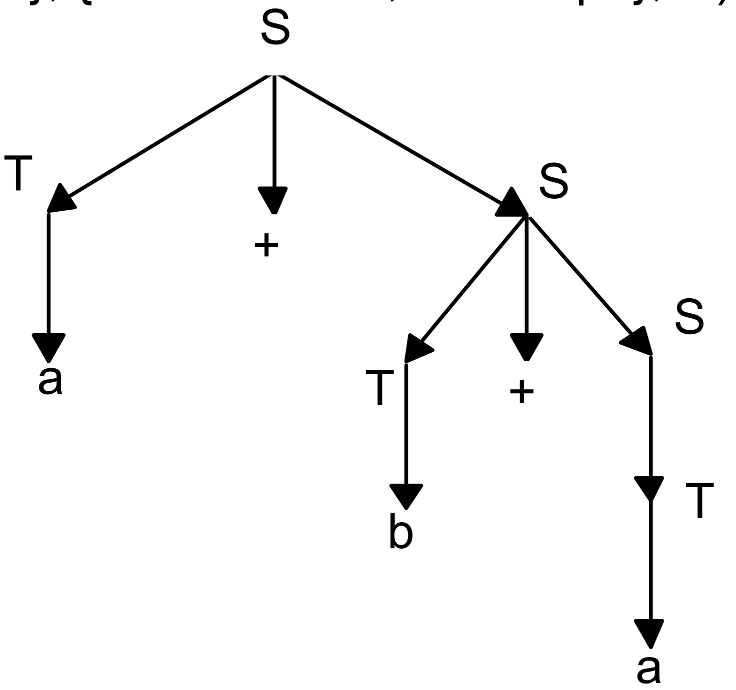
***Определение*:** упорядоченное ориентированное дерево называется **деревом вывода** (или **деревом разбора**) в КС-грамматике G = (T, N, P, S), если выполнены следующие условия:

(1) каждая вершина дерева помечена символом из множества $N \cup T \cup \{\varepsilon\}$, при этом корень дерева помечен символом S; листья - символами из $T \cup \{\varepsilon\}$;

(2) если вершина дерева помечена символом A , а ее непосредственные потомки - символами a_1, a_2, ... , a_n, где каждое $a_i \in T \cup N$, то $A \to a_1 a_2 ... a_n$ - правило вывода в этой грамматике;

(3) если вершина дерева помечена символом A , а ее единственный непосредственный потомок помечен символом ε, то $A \to \varepsilon$ — правило вывода в этой грамматике.

Пример дерева вывода для цепочки a+b+a в грамматике   G = ({a,b,+}, {S,T}, {S $\rightarrow$ T | T+S; T $\rightarrow$ a | b}, S) :



(1) S$\rightarrow$T+S $\rightarrow$ T+T+S $\rightarrow$ T+T+T $\rightarrow$ a+T+T $\rightarrow$ a+b+T $\rightarrow$ a+b+a

(2) S $\rightarrow$ T+S $\rightarrow$ a+S $\rightarrow$ a+T+S $\rightarrow$ a+b+S $\rightarrow$ a+b+T $\rightarrow$ a+b+a

(3) S $\rightarrow$ T+S $\rightarrow$ T+T+S $\rightarrow$ T+T+T $\rightarrow$ T+T+a $\rightarrow$ T+b+a$\rightarrow$ a+b+a

КС-грамматика G называется **неоднозначной**,
если существует хотя бы одна цепочка $\alpha \in L(G)$, для которой может быть построено два или более различных деревьев вывода.

Это утверждение эквивалентно тому, что цепочка α имеет два или более разных левосторонних (или правосторонних) выводов.

В противном случае грамматика называется **однозначной.**

Утв. Проблема определения, является ли заданная КС-грамматика однозначной, является **алгоритмически неразрешимой**.

Язык, порождаемый грамматикой, называется **неоднозначным**, если он не может быть порожден никакой однозначной грамматикой.

Утв. Проблема определения, порождает ли данная КС-грамматика однозначный язык (т.е. существует ли эквивалентная ей однозначная грамматика), является **алгоритмически неразрешимой.**

- Пример неоднозначного языка:

$L = \{a^n b^n c^m \mid n>0, m>0\} \cup \{a^n b^m c^m \mid n>0, m>0\}$

Вопросы и задачи

1. Перечислить классы грамматик и классы языков.
2. Каким классам принадлежит данная грамматика? Каким классам принадлежит язык, порождаемый данной грамматикой?

(а) $S \to AB$	(б) $S \to AB$	(в) $S \to aB$
$AB \to BA \mid bb$	$Ab \to bb$	$B \to bB \mid A$
$BA \to aa \mid ba$	$B \to b$	$A \to \varepsilon \mid Ba$

3. Сколько деревьев вывода существует для цепочки aaaaa в КС-грамматике

   $S \to SS \mid a$?

4. Построить левый и правый выводы для цепочки aaa для граммматики $S \to SAS \mid \varepsilon$

   $A \to aS \mid Sa$

5. Однозначна ли грамматика из задачи 4? Однозначен ли порождаемый ею язык?

Еще задачи на классификацию можно найти на стр. 94 пособия: http://cmcmsu.no-ip.info/download/formal.grammars.and.languages.2009.pdf

[Волкова И.А., Вылиток А.А., Руденко Т.В. Формальные грамматики и языки. Элементы теории трансляции]